



یکشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۲۴

دفترچه پاسخ

فصل ۱ و ۳ ریاضی دهم +
 فصل ۱ گسسته +
 فصل ۲ و ۳ هندسه دوازدهم

دوبینگ‌ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
ریاضیات

ویراستاران	طراحان	مسئول درس	درس
فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنونند - سجاد احمدی فؤاد خیرآبادی	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان سوگند روشنی - محمدرضا حسینی‌فرد	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	ریاضیات

الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارات‌های جبری	-	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	جامع مثلثات	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	مباحث پایه
هفته ششم	هفته پنجم	هفته چهارم	هفته سوم	هفته دوم	هفته اول

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



دانش آموزان عزیز ماز ❤️

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشید.

اهمیت مجموعه، الگو و دنباله - توان‌های گویا و عبارتهای جبری!

ما آدم‌ها همواره دنباله این هستیم که پدیده‌های دور و برمون رو بشناسیم و بتونیم کنترلشون کنیم. از این رو همه پدیده‌ها رو به کمک یه الگوی مناسب بیان می‌کنیم تا قابل درک و محاسبه شوند.

پس یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی اطرافمون و پی بردن به الگوی نهفته آنهاست و به حدی این موضوع اهمیت داره که برخی معتقدند که ریاضی علم مطالعه الگوهاست.

تعجب نکنید، فصول این بخش مبنا و پایه ریاضیاته که با تسلط رو اینا می‌تونین خیالتون بابت حل مسائل معادله، نامعادله و ... کاملاً راحت باشه.

این بخش‌ها در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

سوالات تایج، لگاریتم و نمایی، مشتق و کاربردش و ... حتی احتمال، همه و همه می‌تونن با این بخش‌ها ترکیب بشن، از طرفی بعضی از طراحان سعی بر این دارن که سوالات ترکیبی جدیدی از بخش‌های دیگه طرح کنند که از الگوها و دنباله در آنها استفاده شود.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

برای بخش دنباله هندسی توجه ویژه‌ای به توان و قوانین توان (فصل ۴ نهم) داشته باشید.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۲	۱	۱	۱	۱	۱
مباحث مطرح شده در سوال	دنباله بازگشتی ضابطه یک دنباله	جمله عمومی یک دنباله	جمله عمومی دنباله هندسی	دنباله حسابی و هندسی	دنباله حسابی	دنباله هندسی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنیم که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان... ❀

حسین شفیعیزاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز



- ۱- در یک باشگاه ورزشی ۸۰ نفر حضور دارند که ۳۵ نفر از آن‌ها والیبال و ۲۵ نفر از آن‌ها بسکتبال بازی می‌کنند. اگر تعداد افرادی که در هر دو رشته بازی می‌کنند، $\frac{1}{3}$ افرادی باشد که در هیچ‌یک از دو رشته فعالیت نمی‌کنند، در این صورت در این باشگاه، چند نفر فقط والیبال بازی می‌کنند؟
- (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

اگر مجموعه افرادی که والیبال بازی می‌کنند را A و مجموعه افرادی که بسکتبال بازی می‌کنند را B بنامیم، در این صورت با فرض $n(A \cap B) = k$ خواهیم داشت:

$$n(A) = 35, n(B) = 25, n(A \cap B) = k$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 35 + 25 - k = 60 - k$$

تعداد افرادی که ورزش نمی‌کنند برابر $3k$ خواهد بود (یعنی در هیچ‌یک از دو رشته، فعالیت ندارند) بنابراین داریم:

$$n((A \cup B)') = 3k$$

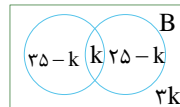
از طرفی، چون $n((A \cup B)') + n(A \cup B) = 80$ ، پس خواهیم داشت:

$$3k + 60 - k = 80 \Rightarrow 2k = 20 \Rightarrow k = 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 10 = 25$$

$$(35 - k) + (k) + (25 - k) + 3k = 80 \Rightarrow 2k = 20 \Rightarrow k = 10$$

$$n(A - B) = 35 - k = 35 - 10 = 25$$



روش دوم:

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

تعداد اعضای مجموعه متناهی A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



دوبار هاشور زده شده

می‌دونید چرا اینجوری شد؟

شکل مقابل را ببینید:

برای شمارش تعداد اعضای اجتماع، تعداد اعضای $(A \cap B)$ را دو بار شمارش کردیم! پس یکبارش رو حذف می‌کنیم.

نکات طلایی

$$n(A) + n(A') = n(A \cup A') = n(U)$$

می‌دانیم که A و A' دو مجموعه جدا از هم هستند، پس داریم:

همچنین مجموعه‌های $B - A$ ، $A \cap B$ و $B - A$ دوه‌دو مجزا از هم محسوب می‌شوند، پس:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

تعداد اعضای که فقط در یکی از مجموعه‌های A یا B قرار دارند:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضای که فقط در مجموعه A عضویت دارند:

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

تعداد اعضای که در هیچ‌یک از دو مجموعه A و B قرار ندارند:

همچنین بدانید:

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)' = n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

یکم دومرگان ببینید:

$$n(A \cap B)' = n(A' \cup B') = n(U) - n(A \cap B)$$

گروه آموزشی ماز



۲- در دنباله هندسی با جملات مثبت اگر با جمله اول a و $\frac{a_6}{a_3} + \frac{a_2}{a} = 6$ ، قدرنسبت دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{2}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{aq^5}{(aq)^3} + \frac{aq}{a^2} = 6 \Rightarrow \frac{q^2}{a^2} + \frac{q}{a} = 6$$

$$\frac{q}{a} = t \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow q = 2a \\ t = -3 \Rightarrow q = -3a \end{cases}$$

جمله عمومی دنباله هندسی

اگر در یک دنباله هندسی، جمله اول را با a_1 و قدرنسبت را با q نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \text{جمله } n \text{ ام } (a_n) \\ & & & & & & \uparrow & \\ & & & & & \text{جمله پنجم } (a_5) & & \\ & & & & \uparrow & & & \\ & & & \text{جمله چهارم } (a_4) & & & & \\ & & \uparrow & & & & & \\ & \text{جمله سوم } (a_3) & & & & & & \\ & \uparrow & & & & & & \\ & \text{جمله دوم } (a_2) & & & & & & \\ & \uparrow & & & & & & \\ & \text{جمله اول} & & & & & & \\ a_1 & \xrightarrow{\times q} & a_1q & \xrightarrow{\times q} & a_1q^2 & \xrightarrow{\times q} & a_1q^3 & \xrightarrow{\times q} & a_1q^4 & \dots & \xrightarrow{\times q} & a_1q^{n-1} \end{array}$$

بنابراین، جمله n ام یک دنباله هندسی که همان جمله عمومی آن می باشد، به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_n = a_1 q^{n-1}; (n \in \mathbb{N})$$

- $a_1 =$ جمله اول
- $a_n =$ جمله n ام
- $n =$ شماره جمله
- $q =$ قدرنسبت

توجه:

توجه کنید که در جمله عمومی یک دنباله هندسی توان قدرنسبت، یک عبارت درجه اول برحسب n بوده که ضریب n در آن برابر ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۳- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d تساوی $6a_7 - 5a_3a = 3aa_7$ برقرار باشد، واسطه حسابی جمله نهم و پنجم چند برابر قدرنسبت دنباله است؟

- (۱) ۷ یا ۴ (۲) ۹ یا ۳ (۳) ۴ یا ۸ (۴) ۷/۵ یا ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۴

$$6(a+d)^2 - 5(a+2d)a = 3a(a+d)$$

$$6(a^2 + d^2 + 2ad) - 5a^2 - 10ad = 3a^2 + 3ad$$

$$a^2 + 6d^2 + 2ad = 3a^2 + 3ad \Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0$$

$$(a+2d)(2a-3d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2d \\ a = \frac{3}{2}d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = a + (n-1)d = -2d + (n-1)d = (n-3)d \\ a_n = a + (n-1)d = \frac{3}{2}d + (n-1)d = (n + \frac{1}{2})d \end{cases}$$

$$\frac{a_7}{d} = \begin{cases} \frac{4d}{d} = 4 \\ \frac{7/5d}{d} = 7/5 \end{cases}$$

واسطه حسابی جمله نهم و پنجم، جمله هفتم است.



جمله عمومی دنباله حسابی

اگر در یک دنباله حسابی، جمله اول را با a_1 و قدرنسبت را با d نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{جمله } n \text{ ام } (a_n) & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \text{جمله چهارم } (a_4) & \text{جمله سوم } (a_3) & \text{جمله دوم } (a_2) & \text{جمله اول} & \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ a_1 & \xrightarrow{+d} & a_1 + d & \xrightarrow{+d} & a_1 + 2d & \xrightarrow{+d} & a_1 + 3d \dots \xrightarrow{+d} & a_1 + (n-1)d \end{array}$$

بنابراین جمله n ام یک دنباله حسابی که همان جمله عمومی آن می باشد، به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

جمله اول = a_1

جمله n ام = a_n

شماره جمله = n

قدرنسبت = d



توجه:

اگر فاصله بین جملات یک دنباله حسابی با هم برابر باشند نیز می توان از رابطه بالا استفاده کرد، به عبارت دیگر، اگر a_n, a_m, a_p سه جمله از یک دنباله حسابی باشند، به طوری که فاصله بین سه جمله با هم برابر باشد، در این صورت داریم:

$$a_n, \dots, a_m, \dots, a_p \quad a_m = \frac{a_n + a_p}{2}$$

$\xrightarrow{+kd}$ $\xrightarrow{+kd}$

گروه آموزشی ماز

۴- اگر جملات چهارم و هشتم دنباله خطی a_n به ترتیب برابر جملات دوم و هفتم دنباله خطی b_n باشند و قدرنسبت ها دو عدد طبیعی یک رقمی باشند، اختلاف جملات بیستم آن ها چه عددی است؟

۲۴ (۴)

۸ (۳)

۲۰ (۲)

۱۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} a_4 = b_7 \\ a_8 = b_7 \end{cases} \text{ دو دنباله خطی باشد، آن گاه: } \begin{cases} a_n = an + b \\ b_n = cn + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b = 7c + d \\ 8a + b = 7c + d \end{cases} \Rightarrow 4a = 5c \Rightarrow a = 5, c = 4$$

$$\begin{cases} 20 + b = 8 + d \\ 40 + b = 28 + d \end{cases} \Rightarrow d - b = 12$$

با داشتن a و c به کمک جملات دنباله $d - b$ را به دست می آوریم:

$$a_7 - b_7 = (20a + b) - (20c + d) = 20(a - c) + b - d = 20 \times 1 - 12 = 8$$

الگو و دنباله خطی

به الگوها و دنباله هایی که اختلاف هر دو جمله متوالی در آن ها عددی ثابت باشد، الگو یا دنباله خطی می گوئیم و جمله عمومی آن ها به صورت $t_n = an + b$; $\{a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ است.

توجه کنید که در جمله عمومی دنباله خطی، ضریب n (همون a) اختلاف بین جملات متوالی در دنباله خطی است که به آن قدرنسبت دنباله خطی می گوئیم.

$$t_1 \xrightarrow{+a} t_2 \xrightarrow{+a} t_3 \xrightarrow{+a} t_4 \dots$$

به عنوان مثال:

اگر $t_n = -2n + 5$ جمله عمومی یک دنباله خطی باشد، جملات آن به صورت $3, 1, -1, -3, -5, \dots$ است که در آن هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۲ واحد کاهش یافته است، ببینید:

$$3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-2} -3 \xrightarrow{-2} -5 \dots$$

همانطور که می بینید اختلاف جملات متوالی در این دنباله، همان ضریب n در جمله عمومی دنباله است.

گروه آموزشی ماز



۵- اعداد طبیعی را چنان دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد در هر دسته مربع کامل باشد، در دسته‌ای که تعداد اعضای آن به ۱۳ می‌رسد، جمله وسط آن دسته کدام است؟

- ۵۷ (۱) ۳۱ (۲) ۳۴ (۳) ۴۳ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۴

$$\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \{10, \dots, 16\}$$

۷ عضو ۵ عضو ۳ عضو ۱ عضو

$$2n - 1 = 13 \Rightarrow n = 7$$

پس در دسته n نام تعداد اعضای دسته $2n - 1$ است.

یعنی دسته هفتم هستیم، بزرگترین عضو دسته هفتم ۴۹ است.

$$\text{دسته هفتم} = \{37, 38, \dots, 49\}$$

$$\text{عدد وسطی} = \frac{37 + 49}{2} = \frac{86}{2} = 43$$

گروه آموزشی ماز

۶- اگر a, b, d دنباله هندسی و a, b, c, d دنباله حسابی تشکیل دهند، قدرنسبت دنباله هندسی چه عددی است؟

- $\frac{3}{4}$ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{قدرنسبت هندسی} = \frac{4-2}{2-1} = 2$$

در واقع جملات اول، دوم و چهارم دنباله حسابی سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند، پس:



اگر جملات m ام و n ام و k ام از یک دنباله حسابی خود تشکیل دنباله هندسی دهند، آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی $q = \frac{k-n}{n-m}$ است.

گروه آموزشی ماز

۷- هرگاه a_n یک الگوی خطی و $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ یک الگوی درجه ۲ باشد، به طوری که جملات اول و سوم الگوی خطی به ترتیب ۴ و ۱۰ باشند، جمع جمله چهارم دو دنباله چه عددی است؟

- ۲۲۱ (۱) ۱۶۹ (۲) ۱۷۶ (۳) ۱۸۱ (۴)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰)

پاسخ: گزینه ۱

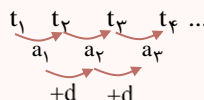
$$a_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 1$$

$$a_n = 3n + 1, b_n = (3n + 1)(3n + 4) \Rightarrow b_n = 9n^2 + 15n + 4$$

$$a_4 + b_4 = (13) + (144 + 60 + 4) = 13 + 208 = 221$$

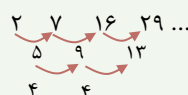
الگو و دنباله درجه دوم

به الگوها و دنباله‌هایی که میزان اختلاف جملات متوالی در آن‌ها ثابت نبوده و اختلاف جملات متوالی، خودشان تشکیل یک دنباله خطی بدهند، الگو یا دنباله درجه دوم می‌گوییم که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$; ($a \neq 0$) است، به عبارت دیگر، اگر t_n دنباله درجه دوم و a_n دنباله اختلاف جملات متوالی آن باشد، در این صورت a_n دنباله‌ای خطی با قدرنسبت d است.



به عنوان مثال:

اگر $t_n = 2n^2 - n + 1$ ، جمله عمومی یک دنباله درجه دومی باشد، جملات آن به صورت $2, 7, 16, 29, \dots$ است و داریم:



همانطور که می‌بینید اختلاف جملات متوالی این دنباله به صورت $5, 9, 13, \dots$ هستند که خودشان تشکیل یک دنباله خطی با قدرنسبت ۴ می‌دهند.



نحوه به دست آوردن جمله عمومی یک دنباله درجه دوم

می‌دانیم که جمله عمومی یک دنباله درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$; $(a \neq 0)$ است، حال برای به دست آوردن ضرایب مجهول a , b و c به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ♦ برای به دست آوردن ضریب a ، اختلاف اختلاف‌های جملات متوالی دنباله (همان قدرنسبت دنباله خطی a_n) را به دست آورده و آن را نصف می‌کنیم.
- ♦ برای به دست آوردن ضریب c ، از رابطه $c = t_1 - (a_1 - d)$ استفاده می‌کنیم.
- ♦ در نهایت، برای به دست آوردن ضریب b ، یکی از جملات دنباله (معمولاً جمله اول) را در جمله عمومی t_n جای‌گذاری می‌کنیم.

گروه آموزشی ماز

۸- حاصل $A = \frac{\sqrt[3]{9\sqrt{27}} \cdot \sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}} \times 81^{-\frac{1}{4}}}$ کدام است؟

۴ $4\sqrt[3]{3}$

۳ $6\sqrt[3]{9}$

۲ ۹

۱ ۱۸

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$A = \frac{\sqrt[3]{3^2 \times 3 \sqrt{3}} \times \sqrt[3]{2^3 \sqrt{3}}}{\sqrt[3]{3 \times 3^{-1}}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{3}} = 18$$

دقت داشته باشید $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$: $a > 0$

کار کردن با رادیکال‌ها

اگر a عددی مثبت باشد، برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

♦ اگر فرجه‌ها یکسان باشد:

رادیکال‌ها با فرجه یکسان را می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

راستی تا یادم نرفته، اگر n زوج باشد، a و b نامنفی باشند! در ضمن در رابطه سمت راستی باید $b \neq 0$

♦ اگر فرجه‌ها متفاوت باشد:

دو راهکار داریم:

اول اینکه با استفاده از تعریف توان گویا $(\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}})$ رادیکال‌ها را به شکل توانی می‌نویسیم و از خواص توان‌ها استفاده می‌کنیم.

دومین راهکار، یکسان کردن فرجه‌هاست، فرجه مشترک ک.م.م فرجه‌هاست، سپس باید فرجه مشترک را بر هر کدام از فرجه‌ها تقسیم کرده و حاصل را در توان عبارت زیر رادیکال ضرب کنیم، ببینید:

به عنوان مثال:

$$\sqrt{5} \times \sqrt[5]{5^3} = \sqrt[10]{5^{1 \times 5}} \times \sqrt[10]{5^{3 \times 2}} = \sqrt[10]{5^5} \times \sqrt[10]{5^6} = \sqrt[10]{5^{11}}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

در حالت کلی نمی‌توان گفت: $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \pm b}$ ، در صورتی می‌توان رادیکال‌ها را جمع و تفریق کرد که دقیقاً یکسان باشند، در این صورت رادیکال را با ضریب جمع و تفریق می‌کنیم نه زیر رادیکال‌ها را!

قانون ضرب فرجه‌ها

فرجه‌های زیر هم، در هم ضرب می‌شوند، همین! ببینید:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

گروه آموزشی ماز



۹- اگر $A^3 = (\sqrt[3]{4} + 3)(\sqrt[3]{2} + 3) - 8 = A^3$ مقدار $(A-1)^3$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$A^3 = (\sqrt[3]{4} + 3)(\sqrt[3]{2} + 3) - 8$$

$$A^3 = \sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 1 \Rightarrow A^3 = (\sqrt[3]{2} + 1)^3$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{2} + 1 \Rightarrow (A-1)^3 = 2$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر $A = \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ و $B = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5 + \sqrt{6}}$ ساده شده $A - B^2$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۴√۶ (۳)

۵ (۲)

۸√۶ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \frac{2(\sqrt{8} + \sqrt{27})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} A = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + 3 - \sqrt{6})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 10 - 2\sqrt{6}$$

$$B = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{27}}{5 + \sqrt{6}} \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} B = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2 + 3 + \sqrt{6})}{5 + \sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$B^2 = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow A - B^2 = (10 - 2\sqrt{6}) - (5 - 2\sqrt{6}) \Rightarrow A - B^2 = 5$$

دنیای اتحادها

مفهوم اتحاد

اتحاد جبری، تساوی بین دو عبارت جبری است که به ازای تمام مقادیر مجاز برای متغیرهایشان برقرار است.

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$	نتایج
$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$	
$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$	
$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$	

اتحاد مربع سه جمله‌ای

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اتحاد مزدوج

هر وقت دو عبارت مزدوج دیدید یا تفاضل دو جمله با توان‌های زوج، مزدوج برنید.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مکعب دو جمله‌ای

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$	اینجوری هم بلد باشید
$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$	
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$	نتایج
$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$	



اتحاد چاق و لاغر (فیل و فنجان)

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $A = \frac{\sqrt[3]{4}}{2-\sqrt[3]{4}}$ و $B = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}$ کدام گزینه صحیح است؟

AB = ۱ (۴)

A + B = ۱ (۳)

A + B = $\sqrt[3]{2}$ (۲)

AB = ۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \frac{\sqrt[3]{4}}{2-\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

$$AB = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{2-1} = 1 \Rightarrow AB = 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر $a = \sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $b = \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ساده شده $A = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$ کدام است؟

$2\sqrt{3}+2$ (۴)

$2\sqrt{3}-2$ (۳)

$2\sqrt{3}+1$ (۲)

$2\sqrt{3}-1$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$A = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2$$

$$A = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \Rightarrow A = 2\sqrt{3} + 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $A = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{24}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$ حاصل $(A-3)^2$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{24}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$A = 4 - 1 - \sqrt{2} \Rightarrow A = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow (A-3)^2 = 2$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- اگر $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2-1} = 2$ ساده شده عبارت $A = \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{a^2+a+1}$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{a^2}{a^4-1} = 1 \Rightarrow a^4 - 1 = a^2$$

$$A = \frac{2(a^2+1)}{(a^4+2a^2+1)-a^2} = \frac{2(a^2+1)}{a^4+1+a^2} = \frac{2(a^2+1)}{2(a^2+1)} = 1$$

گروه آموزشی ماز



۱۵- هرگاه $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2} (\sqrt{2}-\sqrt{3} - \sqrt{2+\sqrt{3}})$ ساده شده A کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{3}$ (۲) ۱ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) -۱

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \cdot \underbrace{(\sqrt{2}-\sqrt{3} - \sqrt{2+\sqrt{3}})}_B = -\frac{\sqrt{2}}{2} B$$

$$B < 0, B^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{4-3} = 2 \Rightarrow B = -\sqrt{2}$$

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times -\sqrt{2} = 1 \Rightarrow A = 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- شعاع دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات که روی خط $3x = 4(5-y)$ و تری به طول ۶ جدا می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۵

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

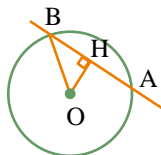
$$3x = 4(5-y) \Rightarrow 3x + 4y - 20 = 0$$

ابتدا فاصله مبدأ تا خط را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow OH = \frac{20}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4$$

$$BH = \frac{1}{2} AB = 3$$

$$BO = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{16+9} = 5$$



مطابق شکل از فیثاغورس در مثلث OBH استفاده می‌کنیم:

فرمولی دیگر

اگر وتر دایره را قطع کرده باشد، برای محاسبه طول شعاع دایره با رسم شعاع گذرنده از وسط وتر، طبق قضایایی که در کتاب هندسه ۲ اثبات شد، این شعاع عمودمنصف وتر خواهد بود. بنابراین طول وتر AB (که در واقع کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه H است) داریم:

$$AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{|F(x_0, y_0)|}$$

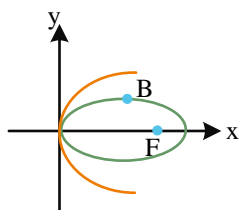


که در فرمول بالا، $F(x_0, y_0)$ یعنی مختصات H را در معادله دایره قرار دهیم. (البته در ابتدا باید معادله دایره به فرم $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ تبدیل کنیم.)

گروه آموزشی ماز

۱۷- در شکل مقابل، کانون بیضی بر کانون سهمی منطبق است. اگر رأس ناکانونی بیضی باشد، فاصله کانون تا خط هادی سهمی کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸



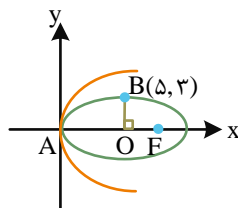
(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

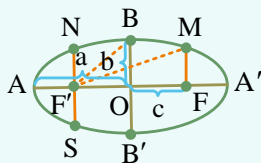
با توجه به $B(5, 3)$ داریم:

$$O(5, 0) \text{ مرکز بیضی} \Rightarrow \begin{cases} BO = 3 = b \\ OA = 5 = a \end{cases}$$

$$c = OF = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 4 \Rightarrow AF = 9$$



بنابراین در بیضی با توجه به رابطه فیثاغورس داریم: پس فاصله کانون تا خط هادی ۱۸ است.



نکات بیضی و سهمی در یک نگاه

F و F': کانون‌ها

A و A': رأس‌های کانونی

B و B': رأس‌های ناکانونی

همچنین $MF + MF' = 2a$ و $AA' = 2a$ و $BB' = 2b$ و $FF' = 2c$ و البته $a^2 = b^2 + c^2$. همچنین می‌توان ثابت کرد که طول وتر عمود بر یکی از کانون‌ها

(NS) می‌شود. $NS = \frac{2b^2}{a}$

خروج از مرکز بیضی هم همیشه $e = \frac{c}{a}$ که هر چی بیشتر به صفر نزدیک باشه، بیضی‌مون شبیه دایره میشه و هر چی به یک نزدیکتر باشه، بیضی‌مون شبیه پاره‌خط میشه. (باریک میشه!)

حالا بریم سراغ سهمی

پارامتر سهمی: فاصله رأس تا کانون سهمی که معمولاً به a نشونش می‌دیم. پارامتر علاوه بر طول، یه علامت هم داره که نشون میده دهانه سهمی به کدوم طرف باز میشه! اگر $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پایین یا سمت چپ است و اگر $a > 0$ دهانه سهمی رو به بالا یا راست است. همچنین در سهمی طول وتر گذرنده از F که بر محور تقارن سهمی عمود است همیشه $4|a|$.

گروه آموزشی ماز

۱۸- در سهمی $x^2 + 4(x+y) = 8$ عمودی از کانون بر محور تقارن سهمی رسم می‌کنیم تا منحنی را در A و B قطع کند، اگر S رأس سهمی باشد، مساحت دایره‌ای به مرکز S که از A و B می‌گذرد، کدام است؟

۱۵π (۴)

۵π (۳)

۱۲π (۲)

۱۰π (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

معادله سهمی را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:

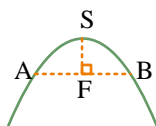
$$x^2 + 4x + 4 = -4y + 12 \Rightarrow (x+2)^2 = -4(y-3)$$

پس سهمی قائم رو به پایین است و پارامتر سهمی $a = 1$ است، پس مطابق شکل داریم:

SF = a = 1

AF = FB = 2a = 2

$\Rightarrow SA = SB = \sqrt{5}$



بنابراین مساحت دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ برابر 5π است.

معادله استاندارد سهمی

$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ (I)

$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$ (II)

در این جا $S(\alpha, \beta)$ مختصات رأس سهمی و a پارامتر سهمی است.

(I) اگر $a > 0$ سهمی افقی و دهانه به سمت راست باز می‌شود و اگر $a < 0$ دهانه به سمت چپ باز میشه.

(II) اگر $a > 0$ سهمی قائم و دهانه به سمت بالا باز می‌شود و اگر $a < 0$ دهانه به سمت پایین باز میشه.

گروه آموزشی ماز

۱۹- چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه $A(2, 4)$ و خط $x = -2$ به یک فاصله باشند و همچنین فاصله آنها از نقاط A و $B(3, 5)$ نیز یکسان باشد؟

۴ بی‌شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه مانند A و یک خط به یک فاصله باشد، یک سهمی است که A کانون آن و خط، خط هادی آن است.

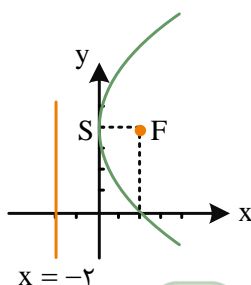
$A(2, 4) \rightarrow F$

$x = -2$

رأس سهمی: $S(0, 4)$

$a = 2$

$(y - 4)^2 = 4(2)(x - 0) \Rightarrow (y - 4)^2 = 8x$





از طرفی مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره خط بین دو نقطه است.

$$A(2, 4) \Rightarrow m = \frac{5-4}{3-2} = 1 \Rightarrow m' = -1 \text{ عمودمنصف}$$

$$B(3, 5) \Rightarrow y - \frac{9}{2} = -1(x - \frac{5}{2}) \Rightarrow y = -x + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \Rightarrow L: y = -x + 7$$

کافی است تعداد نقاط تقاطع سهمی و عمودمنصف L را بررسی کنیم:

$$(-x + 7 - 4)^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 8x$$

$$x^2 - 14x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 196 - 36 = 160 > 0 \text{ نقطه } 2$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- دایره‌ای به مرکز کانون سهمی $x^2 = 6(x+y-1)$ بر خط هادی آن مماس است. مساحت دایره کدام است؟

۹π (۴)

۴π (۳)

۲π (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

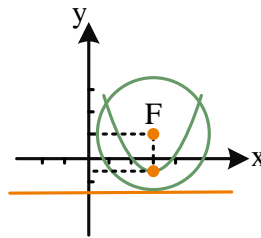
$$x^2 - 6x + 9 = 6y - 6 + 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 6(y + \frac{1}{2})$$

ابتدا معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

سهمی قائم و دهانه رو به بالا $S(3, -\frac{1}{2})$

$$4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$S = \pi(3)^2 = 9\pi$$



گروه آموزشی ماز

۲۱- مجموع فواصل هر نقطه مانند $M(x, y)$ در صفحه از دو نقطه $A(8, 2)$ و $B(2, 2)$ همواره برابر طول قطر دایره $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$ است. اگر M در نقطه‌ای از صفحه قرار گیرد که از A و B به یک فاصله باشد، آن را C می‌نامیم. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت، همواره برابر مقداری ثابت است، بیضی با کانون‌های آن دو نقطه و طول قطر بزرگ برابر مقدار ثابت است. بنابراین:

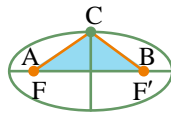
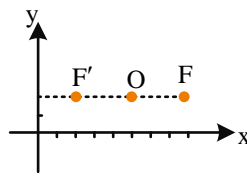
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{0 + 4 + 96} = \frac{10}{2} = 5$$

$$2a = 2(5) \Rightarrow a = 5$$

$$\begin{cases} F(8, 2) \\ F'(2, 2) \end{cases} \Rightarrow c = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b = 4$$

$$S = \frac{1}{2} \times b \times 2c = bc = 4 \times 3 = 12$$



گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $\vec{a}(-1, 2, 3)$ و $\vec{b}(0, 5, 4)$ باشد. مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{a} + 2\vec{b}$ و $2\vec{a} - \vec{b}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

$\frac{15}{2} \sqrt{3}$ (۴)

$\frac{5}{2} \sqrt{5}$ (۳)

$\frac{7}{2} \sqrt{5}$ (۲)

$\frac{15}{2} \sqrt{10}$ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$S = \frac{1}{2} | (2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) | = \frac{5}{2} | \vec{a} \times \vec{b} | = \frac{5 \times 3 \sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2} \sqrt{10}$$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (-7, 4, -5)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{49 + 16 + 25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

کاربرد ضرب خارجی در پیدا کردن مساحت

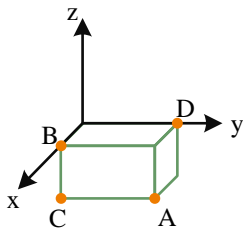
(۱) مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای \vec{a} و \vec{b} :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

(۲) مساحت مثلث ساخته شده توسط \vec{a} و \vec{b} :

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

گروه آموزشی ماز



۲۳- در شکل مقابل، اگر $A(3, 4, -2)$ باشد، حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ کدام است؟

- (۱) -۸
- (۲) -۱۲
- (۳) ۶
- (۴) ۱۶

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به مختصات $A(3, 4, -2)$ داریم:

$$B(3, 0, 0), C(3, 0, -2), D(0, 4, 0)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= B - A = (0, -4, 2) \\ \vec{CD} &= D - C = (-3, 4, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = -12$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (1, 2, 0)$ و $\vec{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، آن گاه اندازه تصویر $\vec{a} \times \vec{b}$ روی $2\vec{b} - \vec{c}$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{6}$
- (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (۴) $4\sqrt{6}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

به کمک رابطه اندازه تصویر داریم:

$$\text{اندازه تصویر} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (2\vec{b} - \vec{c})|}{|2\vec{b} - \vec{c}|} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (2\vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|2\vec{b} - \vec{c}|}$$

$$\frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

طول اندازه تصویر

برای پیدا کردن طول بردار تصویر \vec{a} روی \vec{b} از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

گروه آموزشی ماز



۲۵- اگر $\vec{a} = (2, m, -2)$ و $\vec{b} = (1, n, -3)$ و $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 4, m+n)$ ، آن گاه حاصل $|\vec{a} - \vec{b}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) ۳ (۴) ۵

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & m & -2 \\ 1 & n & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (-3m + 2n, 4, 2n - m) \Rightarrow \begin{cases} -3m + 2n = 1 \\ 2n - m = m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (2, 1, -2) \\ \vec{b} = (1, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = (1, -1, 1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر معادله سیاله $mx + 12y = 18$ در مجموعه اعداد صحیح جواب داشته باشد باقی مانده $m^2 + 3$ بر عدد ۴، چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$(m, 12) | 18 \Rightarrow m \neq 4k$$

$$m = 4k + 1 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 1 \Rightarrow m^2 + 3 = 4k^2 + 4$$

$$m = 4k + 2 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 4 \Rightarrow m^2 + 3 = 4k^2 + 7$$

$$m = 4k + 3 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 6 \Rightarrow m^2 + 3 = 4k^2 + 9$$

در نتیجه باقی مانده بر ۴ می تواند ۰ و ۳ باشد.



توجه!

هر معادله به شکل $ax + by = c$ یک معادله سیاله خطی نامیده می شود، در معادله سیاله خطی، اگر $(a, b) | c$ معادله بی شمار جواب به شکل (x_0, y_0) دارد و اگر $(a, b) \nmid c$ معادله جواب ندارد.

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر $15! + 14! + 13! + \dots + 2! + 1! = 3^a$ و a بزرگ ترین عدد دو رقمی باشد که در معادله صدق می کند، رقم یکان a^a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$3^x \equiv 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{14} \equiv -3 \pmod{3} \xrightarrow{(3, 15)=3} x \equiv -1 \pmod{15}$$

$$x = 15k - 1 \xrightarrow{k=20} a = 99$$

$$a^a \equiv 99^{99} \equiv (-1)^{99} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$$



تذکره!

برای محاسبه رقم یکان یک عدد، کفایت آن عدد را به پیمانه ۱۰ ببریم.

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر p عدد فرد دو رقمی و $a | p + 20$ ، باقی مانده $7 + 5p^2 + 3a^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8k + 1$ نوشت.

$$p \text{ فرد} \rightarrow p^2 = 8k + 1$$

$$a | \underbrace{p + 20}_{\text{فرد}} \Rightarrow a \text{ فرد} \Rightarrow a^2 = 8k' + 1$$



$$3(8k' + 1) + 5(8k + 1) + 7 = 24k' + 3 + 40k + 12 = 8k'' + 7$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- اگر ۱۵۰ روز بعد سه شنبه باشد، ۱۵۰ روز قبل چند شنبه بوده است؟

(۱) یکشنبه (۲) چهارشنبه (۳) پنجشنبه (۴) جمعه

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$150 \equiv 3 \pmod{7}$$

پس امروز شنبه است و اگر سه روز به عقب برگردیم به چهارشنبه می‌رسیم.

گروه آموزشی ماز

۳۰- برای پست کردن نامه‌ای به ۳۵۰۰ تومان تمبر نیاز داریم. اگر فقط تمبرهای ۳۰۰ تومانی و ۴۰۰ تومانی در دسترس باشد، به چند حالت می‌توان تمبرها را

خریداری کرده به طوری که از هر تمبر حداقل یکی خریده باشیم؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$300x + 400y = 3500$$

$$3x + 4y = 35 \Rightarrow 3x \equiv 35 \equiv 3 \pmod{4} \xrightarrow{(3,4)=1} x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 1 \Rightarrow k \geq 0$$

$$3(4k + 1) + 4y = 35 \Rightarrow 4y = 35 - 12k - 3 \Rightarrow y = 8 - 3k \Rightarrow 8 - 3k \geq 1$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{7}{3} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$(x, y) = \begin{cases} (1, 8) & k = 0 \\ (5, 5) & k = 1 \\ (9, 2) & k = 2 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز